Giusto Bellavitis

51.

COMMEMORAZIONE DI GIUSTO BELLAVITIS (1803-1880)[1]

Domenico Turazza, socio effettivo[2]

Adunanza ordinaria del giorno 29 dicembre 1881

Quaranta otto anni di costante affettuosa amicizia, rafforzata da comunanza di studii, di sodalizio, da cordiali famigliari rapporti, mi fanno assai penoso in quest'oggi il còmpito assuntomi; pur tuttavia io spero ritrovare nella mesta soavità dei ricordi quel coraggio e quella forza che si richiedono a tanto ufficio, solo che voi vogliate, onorandi colleghi, essermi cortesi di benigna indulgenza. E di molta indulgenza sento veramente il bisogno in pensando alla necessità di stringere in breve quanto venne operato in cinquanta anni di continuo indefesso lavoro da una delle menti più immaginose e feconde che abbiano spaziato pei molteplici e svariati campi delle matematiche discipline. Né di tutto per certo io potrei tenervi parola, ché troppo si dilungherebbe il mio discorso; Giusto Bellavitis matematico anzi tutto e sopra tutto egli è solo per questa via che, per quanto mel concedano le mie forze, io tenterò di seguirlo; ed anche nella lunghissima via ch'io dovrei percorrere non andrò raccogliendo che ciò che più serve a caratterizzare il valore, e ad affidare la sua memoria ai futuri.

Giusto Bellavitis nacque in Bassano, grossa terra del Vicentino, il 22 novembre del 1803 da Ernesto Bellavitis e da Giovanna Navarrini, da nobile ed onorata famiglia, ma per vicissitudine di casi, e forse per la vita randaia[3] dell'avo, di stremate fortune. Il padre impiegato qual ragioniere presso quel municipio, fosse per temuta deficienza di mezzi, fosse per singolarità d'opinione, non volle dare al figlio altro educatore che sé stesso, e, sufficientemente addentro negli elementi della matematica, lo iniziò in quello studio, nel quale per la svegliatezza dell'ingegno e per l'amore postovi, ben presto avanzò di tanto il maestro da dover ricorrere unicamente a sé stesso per progredire in quella via sulla quale l'aveva indirizzato l'avventurosa previdenza del padre. E qui si pare principalmente la sua tenace forza di volontà e l'amore a quella scienza che doveva essere il principale titolo della sua fama, perché, toltogli dal mancato tirocinio de' soliti studii, l'adito ad una carriera professionale, ed acconciatosi nel posto di cancellista presso il patrio Municipio, nel tempo che gli era lasciato libero dal suo uffizio si diede a tutt'uomo a procacciarsi quei libri che dovevano spianargli la via a penetrare nei più difficili ed oscuri recessi della matematica; e siccome la tenuità de' suoi mezzi gli toglieva ogni possibilità di possederli in proprio, così ebbe principio allora quella maravigliosa serie di estratti e di note che, raccolte in altrettanti volumi rendono testimonianza di quella prodigiosa attività che non gli venne mai meno nella lunga sua vita scientifica; avendo egli scritto di proprio pugno ben oltre cento e cinquanta grossi volumi, che per l'ordine e per un raro discernimento di indici e di note, sono la più utile raccolta di quanto gli fu dato d'apprendere dagli altri, e di apprender agli altri del proprio nella sua lunga carriera, così luminosamente percorsa. Né accadeva mai caso che, abbisognando di ricorrere a lui per conoscere quanto s'era fatto intorno a dato argomento, non venisse pronta l'opera de' suoi indici e delle sue note, così che la storia dell'argomento ti venia porta dinanzi intera pressoché sempre fino all'epoca della domanda; e di qui partono appunto le numerose citazioni che completano così vantaggiosamente le principali delle sue memorie.

Nel modesto ufficio dove pareva vederlo confinare la sorte non era nuovo il caso di scorgere fra inconcludenti carte di puro ordine note e calcoli relativi a quelle ricerche matematiche che in quell'epoca più tenevano il campo, e intorno alle quali la sua forte mente andava speculando forse nell'atto stesso in cui macchinalmente trascriveva una qualche secondaria nota d'ufficio, preparando quelle ricerche che, maturate poi nella quiete della sua stanza, dovevano, giovanissimo ancora, porlo nel novero di quei matematici che più promettevano di sé, ed ai quali si apriva dinanzi un vasto orizzonte di fama non dubbia.

E sono di quest'epoca appunto i suoi primi lavori, che cominciano nel 1826 colla segnalisazione[4] di alcuni errori corsi nei celebri elementi di meccanica del Venturoli in quella parte che riguarda il moto rotatorio, e si chiudono nel 1837 colla esposizione del suo metodo delle equipollenze, da lui immaginato e condotto a termine appunto in questo periodo. Da tutti questi lavori risultano manifestamente due cose, e la vastità delle sue cognizioni nei varii rami della scienza, maravigliosa se si guarda ai pochi mezzi di cui poteva disporre; e quella potenza inventiva che, nel fare sue proprie le nuove vie aperte alla scienza, gli valse ad estenderne i fondamentali concetti, fecondandole con idee originali, e traendone quel suo metodo, così ricco di nuovi teoremi, di nuove ed utili applicazioni, che fu il costante amore della lunga sua vita; e che volle segnalizzato solo nella modesta lapide che, nella sua casa di Padova, doveva ricordarlo ai suoi cari.

La vastità dell'argomento mi sforza a sorvolare sopra la maggior parte di questi lavori, e accontentandomi di accennare le due memorie intorno al calcolo differenziale; quella sulla determinazione delle aree dei poligoni, e dei volumi dei poliedri in funzione delle distanze dei loro vertici, le cui formole vennero pubblicate dallo Staudt solo nel 1842; la sua teoria delle funzioni inverse; le sue osservazioni intorno agli immaginarii, primo passo allo studio successivo di queste quantità; e finalmente la sua memoria sopra alcune formole e serie infinite relative ai fattoriali ed agli integrali Euleriani, della quale dovrò occuparmi più tardi; qui mi limiterò a fermarmi alcun poco sopra le due memorie intorno alla Geometria derivata da lui pubblicate negli anni 1832 e 1838, per dir poi con maggior dettaglio intorno al suo metodo delle equipollenze da lui immaginato e reso pubblico appunto in questo periodo.

Nella seconda delle dette memorie egli si propone di porgere ai giovani studiosi, in un quadro ristretto, i metodi geometrici più generali che, per via più larga ed ardita, giunsero a rivaleggiare ed in molti casi eziandio a vincere in eleganza e facilità i metodi algebrici, e dei quali la celebre opera del Poncelet aveva allora generalizzato l'uso e l'importanza. Sebbene a primo aspetto possa parere questa memoria soltanto una esposizione delle teorie insegnate allora dai moderni geometri, pure merita molta attenzione e per la nuova maniera con cui egli considera quelle teorie, e pel modo di rappresentare graficamente i punti immaginarii delle curve e di studiarne le proprietà; e per l'estensione data allora pel primo all'idea dell'involuzione.

Nella memoria del 1832 egli si propone una nuova derivazione, che intitola dai punti di una retta a quelli di un piano, ed accettando la rappresentazione geometrica della somma di due rette formula un nuovo teorema generale per cui qualunque relazione fra i punti di una retta può estendersi ai punti di un piano; donde la dimostrazione di alcuni nuovi teoremi geometrici, e la traccia di un metodo generale per iscoprire direttamente costruzioni geometriche, alle quali gli usuali metodi allora conosciuti non avrebbero guidato che per via soverchiamente lunga e complicata. Io ho segnalizzato principalmente questa memoria perché in essa compare la prima traccia del suo metodo delle equipollenze, che studiato in un primo saggio presentato all'Ateneo di Venezia nel 1832, e più ampiamente analizzato nel suo saggio di applicazioni di un nuovo metodo di Geometria analitica, pubblicato il 1835 nel volume quinto degli «Annali» del Regno Lombardo-Veneto, venne finalmente da lui esposto nella successiva memoria del 1837, nella quale compare per intiero, in quanto che le sue successive memorie non sono altro che nuove e più accurate esposizioni del metodo stesso allo scopo di agevolarne l'insegnamento, ma in esse nulla vi si aggiunge di sostanziale se ne togli nuove e svariatissime applicazioni.

Attuando un desiderio del celebre Carnot di un algoritmo atto a rappresentare insieme e la grandezza e la direzione delle rette, considera in una retta assieme alla sua grandezza anche la sua inclinazione sopra una retta fissa di posizione, ed accettando l'idea di un'eguaglianza in qualche modo più intima, cui disse equipollenza e contrassegnò col segno di libra, chiamò equipollenti due rette eguali e parallele, e quarta equipollente geometrica dopo tre rette date la retta la cui grandezza è quarta geometrica dopo le tre rette, e la cui inclinazione alla retta fissa è la somma delle inclinazioni delle due medie diminuita di quella della retta estrema, d'onde l'idea di rappresentare con un coefficiente positivo il rapporto di due rette parallele ma diseguali, come nella sua prima memoria sulla Geometria derivata rappresentò due rette diseguali, l'una in continuazione dell'altra. Prendendo poi dalla meccanica il principio della composizione delle rette, disse composta equipollente di due rette date la diagonale del parallelogrammo[5] i cui lati sono equipollenti di quelle due rette, e poté con ciò senza più dimostrare il teorema generale, che qualunque proprietà fra i punti di una retta si trasforma in una proprietà fra i punti di un piano col solo mutar l'eguaglianza in equipollenza; teorema questo già adombrato nella sua prima memoria sulla Geometria derivata, ma che qui trae tosto come immediata conseguenza del teorema fondamentale, che sulle equipollenze si possono eseguire tutte le operazioni e le trasformazioni che sono legittime per le equazioni algebriche.

L'idea di esprimere mediante un coefficiente positivo il rapporto di due rette parallele lo condusse a rappresentare pure mediante un coefficiente il rapporto di due rette variamente inclinate alla fondamentale; e siccome dalla definizione della retta quarta equipollente fra tre rette date risulta che sulle inclinazioni le operazioni si eseguiscono secondo le stesse regole che si seguono nel calcolo degli esponenziali, usò a quest'uopo della funzione esponenziale; che discussa poi nei varii casi di varia inclinazione delle rette lo condusse naturalmente all'uso del simbolo immaginario, al quale si dà per tal modo il vero valore geometrico. Se a tutto ciò si congiunge finalmente l'idea delle equipollenze conjugate, corrispondenti a due figure eguali, delle quali l'una abbia compiuto un mezzo giro intorno alla retta dalla quale si contano le inclinazioni, si avranno tutti i principii fondamentali di questo suo metodo; strumento maraviglioso, principalmente nelle sue mani, e fecondo di svariatissime ricerche geometriche, d'importanti conseguenze, di svariati e nuovi teoremi, perché le equipollenze esprimono sempre le relazioni fra le rette di una figura considerate tanto riguardo alla loro grandezza, quanto alla loro direzione; comprendono cioè tutto intero l'oggetto della Geometria.

Né guari più difficile dei principii fondamentali riesce l'applicazione del metodo, bastando a quest'uopo scrivere sotto forma di equipollenza le condizioni tutte del problema, e giovandosi, quando occorra, delle equipollenze conjugate assegnarne le incognite; con che si giunge assai speditamente alle costruzioni, le quali riescono così intimamente connesse coi dati del problema da vestire quasi l'aspetto di semplici costruzioni sintetiche.

Né credo potersi con fondamento sostenere che altri abbia preceduto il Bellavitis nelle idee che costituiscono il fondamento del suo metodo; pare a me che basti perciò seguirlo nel cammino da esso percorso; che se accettò alcune idee svolte da altri, queste non ne costituiscono per certo la parte più osservabile; e nessuno lo precedette nell'idea fondamentale dei prodotti e dei rapporti delle rette, e nell'ordine sistematico che lo fecero un vero metodo di Geometria analitica.

Questi lavori gli acquistarono ben presto grido di matematico superiore, così che alla istituzione di questo nostro Istituto, il 26 settembre del 1840 vi venne ascritto fra i primi venti membri pensionati, e contribuì coi suoi molteplici lavori ad elevarne la fama.

E questa nomina, che fu per lui meritata ricompensa de' suoi indefessi ed utili studii, fu pure per lui il primo raggio di più fortunato avvenire; imperocché resasi nel successivo 1841 vacante la cattedra di matematica e meccanica nel Liceo di Vicenza, per la mia promozione all'Università di Pavia, gli valse a vincere i mille ostacoli che il mancato tirocinio di regolari studii gli opponeva al conseguimento di quel posto, che in seguito a ciò gli poté venire con minori difficoltà definitivamente affidato il 22 ottobre del 1842, schiudendogli per tal modo la via del pubblico insegnamento, tardo compenso di una valentia così generalmente riconosciuta, d'una fama già tanto diffusa. Superato quel primo passo, nulla più gli si opponeva a poter raggiungere meta più degna, e rimasta vacante la cattedra di Geometria descrittiva presso l'Università di Padova, vi venne chiamato, in seguito a regolare concorso, il 4 gennaio del 1845; e qui sopra campo più vasto, fra mezzo ad amici i più provati ed i più prediletti, poté finalmente usufruire di tutti quei mezzi che gli valsero a perfezionare e ad estendere quanto aveva già prima affidato alla meditazione dei matematici; a tentare nuove ed importanti ricerche; a tracciare nuove ed intentate vie, sempre da lui con vedute originali e feconde luminosamente percorse.

La sua nomina a Vicenza, migliorandone le condizioni economiche, gli permise di poter realizzare il lungo sogno della sua vita, impalmando quella egregia donna, dal cui amore trasse prima conforto ed eccitamento al fare, e che gli fu poscia la più affettuosa delle compagne, creandogli quella famiglia che fu inimitabile esempio di concordia e d'affetto, e per cui poté lasciare incise sulla modesta sua lapide quelle memorande parole, «marito e padre affettuosissimo visse felice».

E, per quanto è dato quaggiù, visse vita veramente felice; perché contento del poco, ebbe quello che per lui potea dirsi il soverchio; perché inclinevole ai miti affetti, ebbe moglie e figlio che gli fecero della casa il maggior dei conforti; ebbe amici pochi ma fidati, la immatura perdita dei quali segnò ne' suoi ricordi con parole così dolenti e sentite da mostrare con quanta rispondenza d'amore e di stima era legato ai medesimi; perché italiano anzi tutto e sopra tutto poté vedere il suo paese libero dallo straniero, costituito in forte e rispettata nazione, e sedere in quell'alto consesso ordinato a moderarne le sorti; perché robustamente costituito ebbe sanità di corpo e di mente invidiabili, e poté, pressoché vecchio, superare una pericolosissima malattia ed i perniciosi effetti della medesima, sopportati con quella serenità di animo che gli permetteva di volgere in scherzo i suoi tentativi per approntare penna con cui poter scrivere, ad onta della invadente paralisi delle mani, la cura elettrica che doveva ridonarlo a perfetta salute; perché finalmente circondato dalla pubblica stima poté vedere il suo nome accolto ne' più riputati consessi scientifici, ed acclamato non solo fra noi, ma eziandio fra gli estranei, che si recarono ad onore di divulgare la prediletta delle sue scoperte scientifiche, sia colla traduzione delle sue memorie, sia coll'uso del suo metodo nella risoluzione di varii e complicati problemi.

E rifacendomi ora ai suoi lavori, e seguendo più l'indole delle materie che non l'ordine del tempo, nel volume primo delle nostre «Memorie» stanno le soluzioni grafiche di alcuni problemi ottenute usando del metodo delle equipollenze; fra le quali mi piace notare quelle relative alla costruzione di un triangolo eguale ad un triangolo dato ed i cui vertici stanno sopra rette date, od i cui lati passano per punti dati; non che quella di inscrivere in un cerchio un poligono i cui lati passino per punti dati od abbiano date lunghezze, perché da queste in ispecial modo apparisce la prevalenza di questo suo metodo sopra quelli usati in quel tempo, ed insieme l'originalità del metodo stesso. E sotto questo aspetto egual peso meritano pure e le sue soluzioni di molti problemi proposti del Tarquem, e la soluzione del problema del Lagrange di assegnare i poli di una proiezione stereografica in modo che tre paesi di conosciute longitudini e latitudini sieno projettati nei vertici di un triangolo dato; e molte e molte altre ancora che si trovano sparse nelle sue varie riviste di giornali, se l'importanza di altre sue ricerche non mi forzasse ad accelerare il cammino; timoroso di allungare altrimenti soverchiamente la già lunga via che mi resta a percorrere.

Il metodo delle equipollenze applicato alle figure piane esprime tutto intero il soggetto geometrico, ed è certamente una delle maniere più semplici e più dirette di rappresentare le relazioni di grandezza e di posizione; ma il metodo delle equipollenze perde interamente questo suo pregio quando si voglia applicare alle figure a tre dimensioni, e vani riuscirono gli sforzi da lui fatti allo scopo di renderne possibile l'applicazione allo spazio. Conveniva a quest'uopo escogitare un nuovo algoritmo che, come quello delle equipollenze in un piano, avesse un significato geometrico, e ciò era riservato all'inglese Hamilton col suo metodo dei quaternioni, del quale il Bellavitis diede nelle memorie della Società Italiana delle scienze un'accurata esposizione, procacciando di legarla a quelle idee che lo condussero al metodo delle equipollenze. E qui giova ricordare come già nella sua prima memoria sulle equipollenze, in una appendice posta al termine della stessa, avesse tentata una segnatura relativa alla direzione nello spazio, mercé cui poté giungere alla formola per la trasformazione delle coordinate; ma qui dovette arrestarsi, essendo riservata al geometra inglese l'introduzione dei nuovi simboli, i quali gli permisero di estendere allo spazio quei rapporti di relazione e grandezza che il Bellavitis aveva già prima applicati al caso delle figure situate in un piano. Né è a credere che l'esposizione del calcolo dei quaternioni fatta in questa memoria sia una semplice riproduzione della teoria dell'Hamilton; il Bellavitis è inventore anche quando nulla inventa; essa è propriamente un accurato e profondo studio di questo metodo, e rimarcabili ne sono le applicazioni ch'egli ne fa; fra le quali segnalizzerò la formola relativa al triangolo sferico; la composizione dei moti rotatorii coi progressivi; il prodotto geometrico dei lati di un pentagono gobbo inscritto in una sfera; e finalmente il teorema che le quattro altezze di un tetraedro sono quattro generatrici di un iperboloide.

Né allo scopo di famigliarizzare in Italia i nuovi metodi geometrici, così vantaggiosamente introdotti dagli stranieri, è meno importante la sua esposizione del metodo degli allineamenti del Grassmann[6], e quella dei nuovi metodi di Geometria analitica che si trovano nel volume ottavo delle nostre memorie. Nella seconda delle dette memorie si propone di riunire in una chiara e sistematica esposizione i nuovi calcoli inventati dagli Inglesi e dai Tedeschi, e pei quali i metodi analitici poterono gareggiare coi metodi geometrici, che di tanto li avevano sopravanzati per opera principalmente dei Geometri francesi. In questa memoria è principalmente degno di nota l'uso dei metodi di inversione e di reciprocità per la derivazione da una curva di altre più curve considerate sotto varii nomi dai Geometri; non che il metodo detto da esso baricentrale, che è rapporto al calcolo baricentrico quello che le coordinate Plückeriane sono rapporto alle Cartesiane, e che si riduce alle coordinate tangenziali del Salmon.

Uno degli argomenti intorno al quale ebbe ad occuparsi più volte, e ciò già dai suoi primi anni, è poi quello della classificazione delle curve, da lui attuato poi nella classificazione delle curve del terzo ordine e pubblicato nel volume XXV, parte II delle «Memorie» della Società italiana delle scienze; ed altrove nel tomo terzo della serie quarta dei nostri «Atti» con un tentativo d'una classificazione delle curve del quarto ordine e della quarta classe. Sarebbe assai malagevole dare un riassunto di queste memorie, specialmente della prima, che è forse un riassunto essa stessa; ma pure l'importanza della cosa merita che vi ci fermiamo sopra, se non più per tentare di esporre le particolari idee che la informano.

Abbandonando gli usuali criteri del numero dei punti nei quali una curva è tagliata da una retta; del numero delle tangenti che da un punto possono condursi a una curva; dell'esistenza e della natura dei rami infiniti, fonda la propria classificazione sulla collineazione e sull'affinità, riunendo in uno stesso genere le curve fra loro collineari, ed in una stessa specie le affini; dice poi curve della stessa forma quelle che sono simili; forma una famiglia coll'unione di quei generi che presentano gli stessi punti singolari e lo stesso numero di pezzi; ed una tribù di specie di quelle che hanno rassomiglianze nel numero e qualità dei rami infiniti.

Una prima divisione delle curve del terzo ordine è stabilita dall'esser le loro coordinate parallele esprimibili o no razionalmente mediante funzioni di una sola variabile; cioè in curve algebriche razionali o no, e che egli dice, le prime d'ordine baricentrico, e d'ordine non baricentrico le altre. Dal fatto poi che tutte le curve del terzo ordine baricentrico sono collineari con l'una e con l'altra delle tre curve inverse della parabola, dell'iperbole e dell'ellisse quando il centro d'inversione è situato sulla curva, trae la loro suddivisione in tre generi, dei quali il primo ha per tipo la[7] curva inversa della parabola; il secondo quella dell'iperbole, ed il terzo la inversa dell'ellisse quando il centro d'inversione è uno dei vertici, prendendo come tipo la specie che si ottiene facendo andare all'infinito l'asintoto[8]. La collineazione poi gli serve a determinare le varie specie, facendo andare all'infinto o l'una o l'altra delle rette situate nel piano della figura.

Per quanto spetta alle curve del terzo ordine non baricentrico ne forma due gruppi, che dice tribù, secondo che sono costituiti da un solo pezzo o da due. Tipo ne è la parabola cubica divergente dell'equazione

$$y^3 = x^3 + 2nx^2 + n$$

secondo che è n minore o maggiore di uno. Alla formazione dei diversi generi servono i valori di n, distinguendosi i generi dal non potersi cangiare una curva di un genere in quella di un altro mediante la più generale derivazione di collineazione. Le varie specie o famiglie di ciascun genere, così della prima come della seconda tribù, le ottiene facendo qui pure andare all'infinito o l'una o l'altra delle rette della figura rappresentativa della parabola predetta nei due casi dei due valori di n. In una nota della sua decima rivista dimostra poi non vero l'asserto di Newton e di Cayley, che tutte le curve del terzo ordine possano considerarsi come projezioni coniche delle cinque parabole divergenti.

Fanno complemento a questa memoria le due note n. 88 della sua settima rivista dei giornali, ed il n. 686 della tredicesima.

Un tentativo d'una classificazione delle curve del quarto ordine e della quarta classe si trova pure al numero 262 della sua duodecima rivista, ch'egli si proponeva di estendere, lo che però non mi consta aver egli fatto in appresso.

Qualunque sia il peso che voglia darsi ai criterii seguiti dal Bellavitis, egli è certo che nella via da lui tracciata assunta una curva come tipo del genere si trovano facilmente tutte le specie o famiglie che fra loro differiscono per qualche essenziale carattere, e ciò senza pericolo di incorrere in quelle ommissioni che passarono inosservate allo stesso Newton; ed i caratteri specifici dipendenti dal numero e dalla natura dei rami infiniti si riconoscono assai più speditamente di quello sia coll'esame delle equazioni esprimenti le curve.

Seguire il Bellavitis nelle svariate e numerose sue ricerche geometriche, sparse per entro alle sue riviste, sarebbe qui opera soverchiamente lunga, ed io debbo limitarmi ad accennarne alcune soltanto, come quelle che a me sembra[no] esser meritevoli di maggiore attenzione.

E qui anzi tutto porrò la sua risoluzione grafica dei triangoli sferici consegnata nella sua quarta rivista. In essa, considerando che mediante l'inversione la sfera si riduce ad un piano, ed i suoi circoli in altrettanti circoli, prende per circolo fondamentale l'inverso del circolo massimo della sfera che ha per polo il centro d'inversione, e chiama circolo armonico qualunque cerchio il quale tagli ortogonalmente il circolo fondamentale, essendo esso tagliato in due punti armonici da una qualunque retta che parta dal centro del circolo fondamentale, e dice circolo contro-armonico quello che taglia il circolo fondamentale in due punti diametralmente opposti. Ne discende che, considerando la figura come inversa della sfera, i circoli contro-armonici sono inversi dei circoli massimi, ossia ne sono le projezioni stereografiche, ed i circoli armonici sono proiezioni stereografiche di circoli i cui poli hanno le projezioni stereografiche sul circolo fondamentale. Insegnato quindi a costruire così i circoli armonici come i contro-armonici, ed osservando come dato un triangolo da un arco del cerchio fondamentale e da due archi di circoli contro-armonici si trovano facilmente gli elementi del triangolo sferico di cui esso è projezione stereografica, porge la soluzione dei varii problemi spettanti ai triangoli sferici; suggerendo alcune modificazioni pel caso in cui il circolo armonico che serve a segnare dati archi sul circolo fondamentale avesse a riescire di incomoda costruzione in causa della sua grandezza. Se io mi sono fermato forse un po' troppo sopra questa nota egli è solo perché mi sembra assai importante l'applicazione che egli ne fa in questa rivista alla soluzione dei problemi di cristallografia, in quanto che il metodo è assai spesso sufficiente alla desiderata determinazione, e giova in ogni caso presentando all'occhio quei triangoli sferici che si dovranno risolvere coi noti calcoli, ed ai quali la costruzione grafica servirà sempre di prova.

Avversario dichiarato della pangeometria accettò con sentita compiacenza le ricerche del Beltrami sulla pseudosfera, ed in un primo numero della sua undecima rivista riporta l'equazione della curva più generale che colla sua rotazione genera la pseudosfera, deducendone il primo teorema del Beltrami, e proponendo modo di costruire materialmente la superficie pseudosferica, che il Beltrami aveva già altrimenti realizzata. In questa nota oppone al conosciuto teorema sui triangoli pseudosferici l'aver scelto ad unità di misura degli angoli un piano, mentre doveasi scegliere una pseudosfera. È rimarchevole poi nella sua tredicesima rivista un accurato studio sopra questa superficie flessibile di curvatura costante negativa; in essa, riportate le relazioni che hanno luogo fra gli angoli e le lunghezze dei lati di un triangolo formato dall'unione di tre geodetiche, e che egli dice trattoidico, ne ricava alcune applicazioni, osservando che uno studio più esteso di questa superficie anziché portare qualche dubbio sulla vecchia geometria ne sarebbe invece una conferma. Riferisco e non giudico.

E a questo potrei forse limitarmi, ma voglio ricordare almeno un altro suo lavoro compreso nella tredicesima rivista, in quanto che torna ad onore di un bravissimo giovane matematico, il Veronese, decoro ora della nostra Università, e nel quale riferisce sopra una memoria di quest'ultimo intorno all'esagramma del Pascal. Allo scopo di rendere più chiara l'esposizione di un argomento per sé assai intricato, usando della segnatura del Grassmann, fece opera sua propria, che merita di essere studiata, e che serve a rialzare il merito del Veronese, del cui lavoro porge un abbozzo, seguendo le sue proprie idee.

Chiuderò questa succinta rivista geometrica col ricordare il suo testo di Geometria descrittiva, perché esso segna un primo avanzamento nella storia di questo ramo così importante e ricco di applicazioni. In esso al rigore del metodo ed alla ricchezza e varietà degli espedienti si congiunge il pregio di aver egli pel primo dato l'esempio di far rientrare nello studio di questa scienza quelle teorie che, fondate dai Greci e riprese dai moderni, giunsero per opera di tanti celebri geometri stranieri e nostrali a dare alla Geometria il metodo e l'eleganza che ora possiede: precursore in ciò del Fiedler, che tanto fece progredire questo ramo dell'insegnamento matematico. A questo riguardo nella sua tredicesima rivista espone alcuni pensamenti e qualche segnatura che gli sembra rendere più accessibili i processi suggeriti dal Fiedler per risolvere alcuni problemi mediante la prospettiva concorrente; e sono in essa rimarcabili le soluzioni di quei problemi che si risolvono senza la conoscenza del circolo di distanza, e di quelli che richiedono la conoscenza del centro di prospettiva.

In tutti questi lavori, e nei molti che ho dovuto lasciare, è notevole il carattere di una spiccata originalità, che appare luminoso principalmente negli artificii coi quali proviene alla soluzione di problemi intricatissimi, o proposti da altri, o che egli stesso si proponeva a dimostrare la prevalenza del proprio metodo, che nella svariatissima serie delle applicazioni egli seppe maneggiare così da poter difficilmente decidere se il merito sia veramente del metodo o non piuttosto dell'autore, maraviglioso per vastità di cognizioni, e per fecondità d'invenzione.

Né meno spiccati per originalità d'invenzione, né meno rimarchevoli per profondità di vedute, per specialità di processi, per uno studio di condurre il problema fino all'ultimo risultamento del numero sono i suoi lavori d'indole parimenti algebrica. Primeggiano fra questi le sue ricerche intorno alla risoluzione delle equazioni numeriche che a più riprese comparvero negli «Atti» e nelle «Memorie» del nostro Istituto, e che racchiudono quanto di più interessante ed utile si presenta in questo importante e difficile argomento.

Studiando quella operazione che il Ruffini aveva proposto per la ricerca delle radici delle quantità ne dedusse, prima per le cubiche e poscia per tutte le equazioni, quel processo, che intitola estrazione delle radici delle equazioni e considera come una quinta operazione aritmetica, col cui mezzo si ottengono assai facilmente le cercate radici, mentre offre direttamente semplici dimostrazioni dei teoremi fondamentali relativi alle stesse, compresovi il celebre teorema del Fourier, ch'egli deduce in maniera facile ed elementare dallo stesso algoritmo che serve alla formazione delle successive trasformate, e che dipende immediatamente dalla divisione algebrica.

Assai rimarchevole è qui un suo criterio per la ricerca di quelli intervalli fra i quali mancano radici, più semplice di quello suggerito dal Fourier ed ampliato dal Lobato[9], in quanto che non richiede né che l'equazione sia liberata dalle radici eguali, né che le due trasformate, fra le quali è compreso il ricercato intervallo, abbiano gli stessi segni in tutti i termini precedenti il penultimo, non esigendo nemmeno la conoscenza di quelle trasformate. Propone un semplice processo di approssimazione così pel caso in cui i valori attribuiti all'incognita formino una progressione aritmetica, come pel caso in cui procedano irregolarmente; espone l'uso dei fattori decimali e dei logaritmi additivi pel caso delle equazioni in cui manchino molti termini; confronta col proprio i metodi del Weddle e dell'Horner; espone un metodo per la ricerca delle radici reali di due equazioni simultanee; considera le equazioni trascendenti, e con numerosi esempii, presi per la massima parte dalle altrui memorie, mostra i vantaggi dei proprii processi. Ma là dove principalmente appare la sua perspicacia e la profondità delle sue vedute è nella parte che si riporta alle radici immaginarie delle equazioni, sieno queste a coefficienti reali od immaginarii. Discusso a più riprese il metodo degli indici del Cauchy[10], qui pure, come per le radici reali, si serve di due processi di approssimazione, o per somme di quantità sempre più piccole, o per prodotti di quantità che sempre più si avvicinano ad uno. Dati prima i confini superiore ed inferiore di tutte le radici piega la teoria degli indici così da far conoscere in quali settori cadano le singole radici, per cui, isolata in tal modo ciascuna radice in un settore, non riesce più difficile avvicinarsi ad essa indefinitamente, bastando a quest'uopo considerare i due ultimi termini della trasformata in $x - 1$ che ha una radice assai piccola.

A questa rapidissima ed incompleta corsa sopra un argomento ch'egli maggiormente predilesse mi trovai forzato e dalla lunghezza del cammino, e dalla impossibilità di riassumere non solo le estese memorie da lui consegnate nei nostri volumi, ma i molti tentativi sparsi nelle sue riviste, sia che consideri i metodi dello Spitzer e del Moth per la determinazione delle radici immaginarie; sia che porga una dimostrazione elementare del teorema di Sylvester; sia che esponga un suo curioso metodo per la risoluzione delle cubiche; sia che riesca a separare le radici senza bisogno della teoria degli indici nel caso di una equazione trinomia a coefficienti reali; sia finalmente che analizzi le difficoltà che presenta il teorema di Rolle, e ne tenti l'estensione anche al caso delle radici immaginarie. Questo lungo studio di un argomento di tanta importanza fu da lui poscia in parte riassunto nelle sue lezioni d'algebra; ma io credo che sarebbe opera utilissima l'ordinarlo in un completo corso di dottrina, perché nuoce forse ad un giusto apprezzamento del singolare suo merito la divisione in tante memorie ed in tanti appunti, e quel po' di scucitura che necessariamente ne perviene.

E qui dovrei dire delle sue ricerche nella difficile teoria della partizione dei numeri, e nella risoluzione delle congruenze; ma siccome questi argomenti si trovano legati colla sua teoria degli immaginarii e con quella delle sostituzioni lineari, così dirò brevemente e delle une e delle altre, non potendo così separarle da schivare inutili ripetizioni.

Fino dal 1847 pubblicò il suo saggio sull'algebra degli immaginarii dove legittima l'espressione considerandola come ente geometrico, e precisamente nel senso, ora accettato, delle quantità complesse. Qui, forse per la prima volta, trovasi segnalizzato il fatto che non tutte le dipendenze fra' due punti di cui la posizione dell'uno dipenda in maniera conosciuta da quella dell'altro sono suscettibili di derivazione; cioè a dire, che non sempre il rapporto in grandezza e direzione dei due movimenti infinitesimi dei due punti è indipendente dalla direzione di uno di questi movimenti; donde la distinzione, fatta poi dal Cauchy, fra le funzioni suscettibili di derivazione differenziale da quelle il cui differenziale cangia al mutar direzione del differenziale della variabile indipendente. In questo saggio porge un metodo pratico per determinare le radici primitive delle congruenze binomie e delle congruenze a modulo composto; ed osservando che la risoluzione delle congruenze binomie riescirebbe assai facile se per ciascun modulo si formassero tutte le potenze di una radice positiva, si propone di approntar tavole per gli esponenti di tali potenze, ch'egli dice logaritmi (indici) per averne le proprietà, riducendosi allora la risoluzione delle congruenze binomie soltanto alla divisione del logaritmo del termine dato per l'esponente dell'incognita. Trattando poi delle equazioni indeterminate del secondo grado osserva che i metodi del Lagrange si applicano alle equazioni omogenee a tre incognite anche nel caso degli immaginarii, e come anzi la generalità dell'argomento renda il metodo alquanto più semplice. Nel presente saggio si trovano pure le regole per riconoscere se un numero piuttosto grande sia divisibile per 7, 11, 13 ecc. ecc.; nonché la risoluzione dell'equazione

$$x^2 + y^2 = n$$

per n assai grande, da lui riprodotta poi più completamente nella sua memoria inserita negli «Annali» del Tortolini dell'ottobre 1850; mostrando come riesca facile averne tutte le soluzioni quando sia nota la decomposizione di n in fattori primi.

In un'altra memoria sulla partizione dei numeri, e sul numero degli invarianti, pubblicata nei predetti «Annali» per l'anno 1859, porge le formole per la risoluzione del problema di assegnare tutti i modi nei quali un numero N può partirsi in p parti, ciascuna delle quali sia uno degli interi compresi nella serie dei numeri $c+nd$; oppure in p parti disuguali scelte nella predetta progressione aritmetica, calcolando all'uopo opportune tavole, da lui riprodotte, più ampliate ed estese, nel suo sunto della teoria delle sostituzioni lineari del Salmon, inserito nel volume nono delle nostre «Memorie». E molto ancora mi resterebbe da aggiungere se il tempo e il luogo non mi consigliassero ad accorciare il troppo lungo cammino.

Un'altra delle questioni sulla quale ebbe a ritornare più volte, sia per segnalizzare nuove relazioni e formole maggiormente idonee al calcolo numerico, sia per rivendicare a sé formole suggerite da altri, si è quella intorno ai coefficienti dello sviluppo dei fattoriali, ed ai numeri Bernoulliani, dei quali ebbe ad accuparsi fino dal 1837 in quella memoria inserita negli «Annali» del Regno Lombardo-Veneto, ch'ebbi a ricordare più sopra. In essa, oltre varie formole relative ai fattoriali, trovasi una tavoletta di coefficienti numerici corrispondenti al loro sviluppo, che tornano opportunissimi in molte circostanze, sia pel calcolo dei numeri Bernoulliani, attesa la loro dipendenza da quelli fra i predetti coefficienti ai quali è stato tolto il fattore che li annulla; sia pel loro uso nelle serie che somministrano le somme col mezzo degli integrali e dei differenziali; e viceversa in quelle che esprimono li integrali in funzione delle differenze. Come saggio dimostra alcune proprietà dei predetti coefficienti, e le loro relazioni colla gamma del Legendre e coll'integrale Euleriano, compresovi il teorema di Staudt sui numeri Bernoulliani. Posteriormente in una nota inserita negli «Annali» del Tortolini per l'anno 1853 riproduce questa stessa tavola, unitamente a due espressioni generali pel calcolo della medesima, ed altre molte e nuove relazioni fra i coefficienti predetti, mostrando come da queste possano dedursene altre, col cui mezzo ottenere i numeri Bernoulliani senza più. Propone poi l'uso di altri numeri interi appartenenti alla classe più generale dei coefficienti dei fattoriali, suggerendo formole con cui calcolarli, e mostrando le loro relazioni coi Bernoulliani e cogli Euleriani, chiudendo collo sviluppo di molte serie espresse per mezzo di questi stessi numeri. E nuove serie e nuove relazioni si trovano nelle sue varie riviste in occasione di porger notizia di lavori altrui, fra le quali mi limiterò solo ad accennare le sue tavole dei numeri del Cauchy, che si trovano inserite nella sua nona rivista.

Fra le varie ricerche intorno al calcolo numerico degli integrali meritano molta attenzione le sue tavole dell'esponenziale e del logaritmo integrale ch'egli contrappose alle tavole del Glaisher[11], allo scopo di facilitarne il calcolo; in quanto che le tavole di quest'ultimo tornano soverchiamente incomode, a motivo della grandezza delle differenze. L'idea fondamentale di questo lavoro sta in ciò che trattandosi di tavole di uso frequente non è necessario di avere immediatamente il valore della funzione cercata, ma torna più opportuno avere una nota funzione di quel valore, purché le interpolazioni riescano assai comode. Ed è appunto seguendo questa idea ch'egli si fa a considerare le dipendenze reciproche di moltissimi integrali, presi dalle copiose tavole del Bierens riducibili al logaritmo integrale, od alle facoltà dell'unità, di cui la tavola quarta somministra il logaritmo, e la quinta il logaritmo iperbolico; ossia quella funzione $Z(x)$, la cui derivata compare nelle espressioni di molti dei detti integrali, e di cui insegna a calcolare il valore quando sia dato quello della funzione.

E guardando principalmente alle applicazioni è per certo di molto interesse la sua memoria sul calcolo approssimato degli integrali d'ordine superiore, nella quale riproduce ampliata la sua tavola dello sviluppo dei coefficienti dei fattoriali, pei legami che hanno con questi le serie relative ai detti integrali; e nella quale riprodotte le formole di Encke[12], vi aggiunge quelle sue proprie che somministrano i valori delle derivate dei varii ordini, che pur possono tornare opportune in molte occasioni.

E rimarchevole è pure un suo facile metodo pel calcolo numerico del digamma che, assieme a molte utili trasformazioni, si trova nella sua settima e nella decima rivista; non che le sue osservazioni sulle tavole del Bierens, delle quali diede ampio ragguaglio a questo Istituto, suggerendo alcune utili modificazioni nella disposizione, ed un'aggiunta in ciascuna categoria di formole contenenti la somma o la differenza di due degli integrali compresi nelle stesse, ma che separatamente non si conoscono.

E continuando nella matematica pura accennerò soltanto la sua memoria sui determinanti, ed il suo sunto delle sostituzioni lineari del Salmon, che gli serve di complemento, e che egli destinava allo scopo di divulgare fra noi la conoscenza delle questioni dell'algebra moderna; perché, sebbene qui, come altrove, anche quando non fa che riferire li altrui risultamenti non possa a meno di non lasciarvi la luminosa orma sua propria; e sebbene nella memoria sui determinanti sia degno di nota l'uso delle chiavi algebriche, e nel sunto il quadro dei principali concomitanti e le tavole relative alla partizione dei numeri, citate sopra, pure sarebbe in queste memorie assai malagevole e soverchiamente lungo il sceverare quello che in esse vi sia di suo proprio da quanto fu fatto, principalmente dai geometri stranieri, dei cui lavori porge un copioso elenco, al quale potrà utilmente ricorrere chiunque si piaccia di queste ricerche.

Ed eguali elenchi delle principali opere e memorie che trattano dello speciale argomento sul quale porta la propria attenzione, si trovano pure alla fine delle principali delle sue memorie, e nelle sue riviste, che, mostrando quanta fosse la sua erudizione nella materia, aprono larga via ad ognuno che desideri informarsi di quanto fu fatto intorno ad un dato argomento.

Né la matematica applicata lo trovò meno solerte e felice cultore.

Guardando principalmente al tempo in cui fu scritta è per certo meritevole di nota la sua memoria sul movimento di un liquido che discende in modo perfettamente simmetrico rispetto ad un asse verticale; non che quella sugli effetti dell'attrito e sul modo di calcolarli; nella quale, per la prima volta, all'idea di coppia sostituisce quella di giratore, ed usando dell'algoritmo delle equipollenze esteso allo spazio, determina l'attrito nella vite a filetto triangolare, e calcola il movimento di un cilindro che ruzzola o striscia sopra di un piano nell'ipotesi che l'attrito della seconda specie, rappresentato da un giratore, sia proporzionale alla pressione ed indipendente dal raggio del corpo ruotante.

Oltre queste memorie nelle sue varie riviste di giornali trovansi molte questioni di meccanica razionale risolte in modo singolare; fra le quali piacemi ricordare la determinazione analitica delle rotazioni dei corpi liberi secondo i concetti del Poinsot, nella quale introduce l'ellissoide inversa dell'ellissoide d'inerzia, e risolve il problema usando del metodo dei quaternoni (quarta rivista); la determinazione della catenaria di egual resistenza eseguita usando delle equipollenze (sesta rivista); la riduzione di un sistema di forze a due forze soltanto eseguita mediante i quaternoni (decima rivista); l'uso della segnatura Plückeriana per la composizione di un sistema di forze nello spazio, ove dimostra come una tale composizione possa adoperarsi eziandio a determinare le resistenze che devono esercitare le varie parti di un sistema rigido, facendone l'applicazione al tetraedro ed all'esaedro pentagono carichi di pesi, nonché alle singole spranghe di un ponte a sistema americano, porgendone in fine opportune soluzioni grafiche (rivista tredicesima e quattordicesima); finalmente la sua teoria degli strumenti ottici che trovasi nella sua undecima rivista nella quale, riprodotta una vecchia nota consegnata negli «Annali» del Tortolini, mostra come, seguendo le idee del Möbius di usare delle frazioni continue, possa essa ridursi così semplice da poter rimpiazzare assai bene la teoria delle lenti che suolsi dare negli ordinarî elementi di fisica.

E della singolare acutezza della sua mente, e del suo desiderio di rendersi perfettamente ragione delle varie teorie una prova si ha e nella sua nota sulle unità di misura delle varie quantità fisiche, e sulla importanza ed uso delle teorie per raccogliere e coordinare i fenomeni fisici, e più forse nelle sue osservazioni intorno alla teoria della probabilità, che consegnate prima al «Poligrafo» nel 1837 vennero da lui poscia riprese negli «Atti» di questo Istituto del marzo 1857 e posteriormente nella dodicesima rivista.

Principio fondamentale del raziocinio, egli dice, è quello di giudicare per analogia, principio di ogni scienza e fondamento anche del dubbio. Opina essersi data al famoso teorema del Bernoulli un'estensione maggiore di quella di cui è suscettibile; distingue la proclività dell'avvenimento dalla sua probabilità, appartenendo la prima all'avvenimento, la seconda all'osservatore. Quest'ultima è assoluta laddove la proclività lascia dubbiosi se essa sia veramente quale si manifesterebbe in un numero infinito di prove; motivo per cui, a suo avviso, il teorema Bernoulliano, fondamento della teoria, non può adoperarsi se non nei casi nei quali si conosca con tutta sicurezza il grado di proclività dell'avvenimento. La ricerca della probabilità degli avvenimenti fatta in base a quelli osservati si appoggia sulla distinzione fra proclività e probabilità. La probabilità d'una causa non è soltanto proporzionale alla probabilità con cui quella causa produrrebbe l'avvenimento ottenuto. Crede che il fondamento della teoria degli errori di osservazione sia piuttosto un fatto convalidato dall'esperienza che una conseguenza dei principii teorici della probabilità, non riputando potersi mai stabilire a *priori* la disposizione che molte osservazioni andranno a prendere intorno al valore esatto, che è più che altro una osservazione del fatto.

Né le principali questioni di fisica passarono davanti a lui inosservate; scrisse sulla dottrina del calorico raggiante; sulla teoria dell'elettromagnetismo; sull'origine delle correnti elettriche; sulle pretese correnti simultanee in un medesimo filo; sui diversi strumenti impiegati nella misura dei fenomeni, e sopra alcuni apparati telegrafici da lui immaginati, e sempre con quella versatilità e potenza d'ingegno che può dirsi il carattere principale della sua attività scientifica. Fra questi lavori merita speciale attenzione la sua nota sulla misura delle correnti elettriche, inserita nei nostri «Atti» del 1864, nella quale espone un metodo, semplice e facile a ricordare, per la determinazione delle correnti che percorrono i diversi rami di una rete di conduttori, comunque complessa. Questo metodo è una nuova forma di quello già proposto alcuni mesi prima dal Kirchhoff[13], e di cui il Bellavitis non aveva avuto notizia. In questa nota medesima propone un semplicissimo istrumento per determinare il rapporto di due resistenze elettriche, attualmente conosciuto sotto il nome di ponte di Wheatstone[14]. Questo fisico infatti lo aveva proposto qualche tempo prima, ma anche di ciò il Bellavitis nulla sapeva. Il predetto strumento è ora impiegato generalmente in tutti i laboratorii di fisica; e se il nostro collega non ebbe il merito della priorità, ciò devesi attribuire al solo fatto che a chi lavora molto colle proprie idee resta poco tempo per conoscere le idee altrui.

Operosissimo, per lui il tempo era lavoro; e quelle riviste di giornali così rimarchevoli per moltiplicità di questioni in esse risolte; per novità d'artificii; per acutezza d'osservazione basterebbero ad attestarlo, quand'anche fosse di minor mole il molto da lui pubblicato, e quello che resta ancora ne' suoi voluminosi manoscritti. Cominciate coll'idea di far conoscere ai più i principali lavori usciti in luce fra gli estranei e fra noi, divennero ben presto largo campo a mostrare il suo particolar modo di vedere nelle varie questioni; a proporre più acconcie dimostrazioni, usando principalmente del suo metodo delle equipollenze; assai spesso a pretesto di pubblicare qualche sua osservazione, fosse essa contraria o no ai lavori dei quali non intese infine se non di porgere una analisi senza più.

Alcune questioni della moderna matematica lo trovarono ritroso; gli parvero troppo azzardate alcune larghe vedute che ora tengono il campo; parve ad alcuni essersi forse arrestato troppo presto; ma se a ciò si opponevano e l'indole sua propria, e il suo particolar modo di vedere, e forse la vecchia abitudine potremo per ciò chiamarlo in colpa? ammiriamo il tanto da lui fatto; sarebbe ingiustizia anche solo il desiderare quello ch'egli avrebbe potuto e saputo pur fare.

Di multiforme ingegno, e piacendosi nelle discussioni, trattò questioni varie, nelle quali non colse forse sempre nel segno, ma dove sarà pur sempre da considerare una dialettica stringata; una spiccata originalità; un'assoluta indipendenza di giudizio, e per certo sempre un caldo desiderio del bene.

Per quanto le mie deboli forze mel concedettero ho tentato dirvi dello scienziato; sarebbe soverchio il dirvi dell'uomo a voi tutti per lunga famigliarità notissimo, e per prontezza d'ingegno, per vivacità di modi, per intemerato carattere altamente stimato; ma il vecchio amico che gli fu costante compagno nella lunga sua vita; che, al letto di morte di due degli amici suoi più stimati e caramente diletti, divise con lui le ansie e il dolore dell'abbandono, non può lasciarlo senza ricordare quella bontà d'animo che lo faceva accorrere sollecito là dove eravi o un dolore da alleviare o un amorevole consiglio da porgere; quell'amore alla famiglia che lo fece l'esempio dei mariti e dei padri; quell'officiosità di modi che lo rese accetto dovunque, e che gli valse l'amore dei più; quella fermezza nei propositi che non gli venne mai meno né per variare di tempi, né per variar di fortune; quella costanza nelle amicizie, non mai smentita anche quando poteva essere pericoloso il mostrarla. Povero Giusto; se nelle serene regioni della seconda tua vita ti giunge un'eco di quaggiù, nella onorata memoria, nella ricca eredità di affetti che vi lasciasti vedrai realizzato il detto del poeta, che anch'essa la tomba ha pur le sue gioie.

12 dicembre 1881[15]

[1] [Il testo a stampa originale ha per titolo: *Commemorazione di Giusto Bellavitis* del m.e. Domenico Turazza. Giusto Bellavitis: effettivo e pensionato dal 26/9/1840; vicepresidente dal 29/3/1861 all'1/4/1863; presidente dal 17/4/1863 al 19/3/1865 (Gullino, p. 372).]

[2] [Per le cariche ricoperte da Domenico Turazza vd. p. 206 nota 2.]

[3] [Così nel testo a stampa originale.]

[4] [Così nel testo a stampa originale.]

[5] [Nel testo a stampa originale si legge «parellelogrammo».]

[6] [Nel testo a stampa originale si legge sempre «Grassman», qui corretto ovunque in «Grassmann». Hermann Grassmann.]

[7] [Nel testo a stampa originale per errore tipografico si legge «le».]

[8] [Nel testo a stampa originale si legge «assintoto».]

[9] [Nel testo a stampa originale si legge «Lobatto». José Lobato.]

[10] [Nel testo a stampa originale si legge sempre «Couchy» qui corretto ovunque in «Cauchy». Augustin Louis Cauchy.]

[11] [Nel testo a stampa originale si legge «Glaischer». James Whitbread Lee Glaisher.]

[12] [Nel testo a stampa originale si legge «Enke». Vd. p. 299 nota 3.]

[13] [Nel testo a stampa originale si legge «Kirchoff». Gustav Robert Kirchhoff.]

[14] [Nel testo a stampa originale si legge «Wheastone». Vd. p. 90 nota 6.]

[15] [«Atti», 40 (1881-1882), pp. 395-422; per la lettera del segretario che annuncia la morte di Giusto Bellavitis e per le parole di compianto pronunciate dal presidente vd. «Atti», 39 (1880-1881), pp. 1-4.]