ANGELO TONOLO

5 Dicembre 1885 — 22 Giugno 1962

È con sentimento di vivo rimpianto che mi accingo a commemorare il prof. Angelo Tonolo, emerito di Analisi Matematica all'Università di Padova, deceduto il 22 giugno 1962.

Gli fui vicino come assistente prima, come collega poi, ebbi modo di conoscere ed apprezzare le Sue alte doti di mente e di cuore e perciò mi sentii a Lui sempre legato da grande amicizia e da devota riconoscenza.

Nato a Casale sul Sile (Treviso) il 5 dicembre 1885, si laureò in matematica pura nel 1908 ed in ingegneria civile nel 1924.

Tutta la Sua carriera si svolse all'Università di Padova, prima come studente, poi come assistente di Calcolo infinitesimale e dal 1929 titolare della stessa materia, avendo vinto il concorso di Calcolo infinitesimale nel 1927 per l'Università di Ferrara, ove insegnò, quale professore straordinario, per due anni.

Egli frequentò la nostra Università quando la Facoltà di Scienze vantava grandi Maestri, quali Veronese, Ricci-Curbastro, Levi-Civita, Severi, che seppero indirizzare la Sua mente ed il Suo spirito ad alte conquiste. In modo particolare, da Gregorio Ricci-Curbastro acquisì la padronanza dei metodi del Calcolo differenziale assoluto e da Tullio Levi-Civita il gusto per le applicazioni meccaniche, fisiche e geometriche.

La Sua attività didattica, oltre che all'Università di Padova, si svolse, dal 1927 al 1956, anche all'Università di Ferrara, ove ebbe incarichi di Ana-

Commemorazione tenuta il 7 dicembre 1963 nell'Archivio antico del Palazzo Universitario centrale dal Prof. Giuseppe Zwirner, Ordinario di Analisi matematica (algebrica ed infinitesimale) di questa Università.

lisi matematica, di Analisi superiore, di Matematiche complementari e di Matematiche superiori.

La Sua attività scientifica fu veramente feconda: ebbe inizio subito dopo la laurea e continuò anche col cessare del Suo insegnamento, cioè il primo novembre 1956. L'ultimo Suo lavoro fu pubblicato nel 1961; ma ricordo che anche dopo quella data, quando era ricoverato in Casa di cura in gravi condizioni, continuava a parlarmi di certe Sue ricerche che purtroppo non potè portare a termine.

Dovette forzatamente interrompere i Suoi studi durante la prima guerra mondiale perchè fu chiamato alle armi e, in qualità di tenente di artiglieria, partecipò ad azioni di guerra, guadagnandosi la croce al merito.

I Suoi studi riguardano principalmente tre indirizzi:

1) Le equazioni alle derivate parziali che interessano la Fisica-matematica dal punto di vista della loro integrazione con quadrature;

2) Le applicazioni del Calcolo differenziale assoluto del Ricci a questioni di Meccanica classica e alla Geometria differenziale delle varietà riemanniane;

3) La Geodesia.

Esordì nel 1910 con una grossa Memoria dal titolo: « Sull'integrazione delle equazioni fondamentali dell'elettrodinamica ». Sullo stesso argomento tornò nel 1930 con un lavoro dal titolo: « Sull'integrazione delle equazioni elettromagnetiche di Maxwell-Hertz », nel 1933 con una Memoria pubblicata nell'Accademia d'Italia e nel 1934 con un lavoro pubblicato all'Accademia Pontificia.

Tutti questi lavori di elettrodinamica hanno lo scopo di integrare le equazioni di Maxwell-Hertz, sia nel vuoto che nei mezzi conduttori percorsi, oltre che da correnti di convenzione, anche da correnti di spostamento, e ciò tanto nei mezzi isotropi, che nei mezzi uniassici e biassici. Il problema che il Tonolo si era proposto può essere formulato nel modo seguente: « Il mezzo S sia limitato da una superficie chiusa σ e su ogni punto di essa, e per ogni istante di tempo, siano conosciute le componenti del campo elettromagnetico. Si domanda la determinazione di queste componenti nei punti di S e per ogni istante di tempo ». Questo problema è completamente risolto nei quattro lavori che abbiamo ricordato: nel 1° le equazioni fondamentali dell'elettrodinamica sono assegnate nel vuoto, nel 2° sono assegnate in un mezzo isotropo, e negli altri due il problema è risolto nei mezzi cristallini, uniassici prima, biassici poi.

In queste ultime ipotesi, il Tonolo ha dovuto escogitare nuovi processi d'indagine. Ciò è dovuto, sia al fatto che il sistema differenziale del secondo ordine — conseguenza di quello di Maxwell-Hertz — cui soddisfano, ad esempio, le componenti della forza elettrica, è formato da tre equazioni in una soltanto delle quali figura una sola delle tre componenti, e propriamente quella secondo l'asse di isotropia; sia anche al fatto che avendo riferito il mezzo ad un sistema di assi di simmetria elettrica, per avere le equazioni in discorso, nella forma classica, necessita poi lasciarlo invariato nel corso dei ragionamenti, perchè un suo cambiamento farebbe mutare la forma delle equazioni dalle quali si sono prese le mosse.

Dalla integrazione di queste equazioni del campo classico passò, negli anni 1935-36, all'integrazione, con quadrature, delle equazioni di Dirac, della meccanica ondulatoria dell'elettrone magnetico (in assenza di potenziale). Questa integrazione viene conseguita sotto un duplice aspetto, o assegnando le formule di rappresentazione dell'integrale del suddetto sistema in tutto lo spazio e per ogni valore del tempo, nell'ipotesi di conoscerlo ivi in un certo istante; oppure assegnando le espressioni in discorso in uno spazio finito, limitato da una superficie chiusa e per ogni valore del tempo, supponendo che l'integrale sia dato in un determinato istante nello spazio considerato e in ogni istante sopra tutto il contorno.

Il risultato finale si presenta sotto una forma molto interessante, e precisamente: « Gli integrali del sistema di Dirac si ottengono dai primi membri delle equazioni stesse sostituendo, al posto delle quattro incognite, quattro opportune funzioni del posto e del tempo ».

Detti studi sulle quattro equazioni di Dirac, della meccanica ondulatoria, hanno ricevuto poi un'ampia estensione in una Sua bella Memoria uscita nel 1937, ove sono studiati i sistemi di n equazioni di Dirac in n+1 variabili indipendenti.

Una ulteriore generalizzazione, in questo indirizzo, è contenuta in uno dei Suoi ultimi lavori, apparso nel 1961, in cui viene data la soluzione del problema di Cauchy per una classe ancora più vasta di sistemi lineari di equazioni a derivate parziali del primo ordine e a coefficienti costanti.

Gli stessi problemi che il Tonolo aveva trattato per le equazioni di Maxwell-Hertz, furono poi da lui risolti nel 1955-56 anche per « Le equazioni stabilite dal De Broglie, nella sua nuova teoria elettromagnetica della luce ».

In questi lavori mostrò come gli integrali, delle equazioni a derivate parziali trovate dal De Broglie, prendano una forma analitica simile a quella assegnata per le soluzioni delle equazioni di Maxwell-Hertz.

Altri problemi di integrazione e altre questioni di idrodinamica, di magnetismo, della teoria del potenziale e di meccanica razionale vennero studiate dal Tonolo. Mi limiterò a ricordare: alcuni studi sul comportamento asintotico di un potenziale di linea che risalgono al 1912-13; un lavoro di idrodinamica del 1914, ove si dà una nuova soluzione del problema delle onde di Poisson-Cauchy mediante un opportuno adattamento del metodo di Volterra per integrare l'equazione canonica del calore, e una Memoria « Sopra una classe di forze vive del Painlevè », pubblicata nel 1960, nella quale si determina la forma dell'energia cinetica per un sistema a vincoli fissi e libero da forze, quando le corrispondenti equazioni dinamiche ammettono integrali primi di forma particolare.

Il secondo gruppo di lavori riguarda, come ho detto, le applicazioni dei metodi del Calcolo differenziale assoluto del Ricci a questioni di meccanica classica e di Geometria differenziale.

Questi metodi di calcolo furono applicati dal Tonolo in un bel gruppo di lavori riguardanti la meccanica dei mezzi deformabili. Incominciò nel 1930 col dar forma intrinseca alle equazioni di equilibrio dei mezzi elastici, ispirandosi ad un lavoro del Lamé, che però non era corretto. Infatti, il Lamé per dare forma geometrica alle equazioni dell'equilibrio dei mezzi elastici, assunse come sistema di riferimento, tre famiglie di superficie isostatiche mutuamente ortogonali. Però queste superficie, in generale, non esistono, onde le equazioni geometriche del Lamé non possono considerarsi quelle che reggono l'equilibrio di un corpo elastico quale si voglia. Ma se non è lecito fissare nel mezzo un tale sistema di superficie, è sempre possibile stabilire l'esistenza di una terna ortogonale di congruenze di linee, ad esempio, quella delle tre direzioni principali (direzioni che sono ortogonali prima e dopo la deformazione). Riferendosi a questa terna di congruenze, il Tonolo riesce a dare forma corretta alla trattazione di Lamé, nel caso generale dei corpi anisotropi.

In un lavoro successivo tratta poi il caso dei mezzi omogenei ed isotropi immersi negli spazi a curvatura costante, ottenendo un gruppo di equazioni geometriche notevolmente semplici, che estende quello che aveva ottenuto il Beltrami nella sua classica Memoria sulle equazioni generali dell'elasticità.

Queste equazioni furono da lui ulteriormente estese, al caso della elasticità più complessa, nella quale cioè ogni elemento di volume del corpo è sottoposto, oltre che all'azione di massa, anche all'azione di una coppia.

L'errore del Lamè, già ricordato, era stato segnalato fin dal 1880 dal Weingarten, il quale aveva determinato le condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza nel solido di un sistema di superficie isostatiche. Chiarito questo punto, restava però sempre di grande interesse, nello studio dell'equilibrio elastico, la conoscenza dei sistemi isostatici che eventualmente il corpo può ammettere. Era perciò ben degno di attenzione il problema della determinazione di tutti i possibili sistemi isostatici di un corpo isotropo in equilibrio.

La questione fu studiata e risolta completamente dal Tonolo in due lavori pubblicati nel 1931, nell'ipotesi particolare in cui le superficie siano soggette a sforzi costanti.

In un lavoro del 1941 riprende in esame le condizioni di Weingarten ora segnalate, liberandole dal riferimento cartesiano e dando loro una forma geometrica notevolmente espressiva.

Una questione poi analoga a quella di Weingarten porta il Tonolo a caratterizzare tutte le deformazioni di un mezzo continuo, nelle quali le facce del triedro principale di deformazione sono tangenti ad un sistema di tre superficie mutuamente ortogonali.

Ottiene così un complesso di tre equazioni sotto una forma assai compendiosa, per le quali con sole derivazioni si riconosce se la data deformazione appartiene, o no, alla classe di quelle che abbiamo precisato.

Sotto altro aspetto, questo sistema di equazioni, si può considerare come un sistema differenziale alle derivate parziali, ed allora a tipi di soluzioni di questo sistema, corrispondono tipi di deformazioni che hanno la proprietà sopra considerata.

Anche nelle ricerche di Geometria differenziale metrica, il Tonolo si è sempre servito dei metodi elaborati da Ricci-Curbastro.

Prendendo a base la trattazione fatta dal Bianchi nelle sue classiche « Lezioni » sulla teoria delle superficie dello spazio ordinario, il Tonolo studiò le superficie immerse negli spazi euclidei a quattro e a cinque dimensioni. Le questioni qui trattate erano già state esaminate da diversi Autori sotto l'aspetto più generale, sia riguardo allo spazio ambiente, sia riguardo alle dimensioni delle varietà considerate. Era però opportuno scendere all'esame dei casi particolari per mettersi più a contatto con il problema, facendone un'analisi minuta, e per vedere più da vicino il gioco che fa in esso il numero delle dimensioni dello spazio 2-tangente della superficie, rilevando nel contempo i notevoli fatti analitici che sono connessi con la questione.

Ecco le ragioni che hanno condotto il Tonolo ad intraprendere questi studi.

In una memoria del 1929 fece un'analisi dettagliata delle superficie generiche dello spazio lineare a cinque dimensioni. Un risultato ben degno di attenzione è che per tali superficie le equazioni di Codazzi non dànno condizioni cui devono soddisfare i coefficienti delle quattro forme fondamentali.

Ha mostrato anche che questo fatto si verifica soltanto per le superficie in discorso.

In una Memoria successiva sono poi studiate le superficie dello spazio lineare a quattro dimensioni.

Il problema poi di caratterizzare in modo invariantivo le varietà riemanniane normali a tre dimensioni trovò, per la prima volta, la sua completa risoluzione in una Memoria del Tonolo, inserita negli « Acta » dell'Accademia Pontificia del 1949.

Ottenne un gruppo di tre equazioni invariantive sotto una forma assai interessante, che completamente caratterizzano le varietà normali. Questo sistema di tre equazioni può essere considerato sotto un duplice aspetto. Se la varietà è assegnata mediante la sua metrica, con sole derivazioni eseguite sulle componenti del tensore fondamentale, si può vedere, mediante le condizioni che ivi sono date, se la varietà è normale o no; se tali condizioni si considerano invece come equazioni differenziali alle derivate parziali, a tipi di soluzioni di tali equazioni, corrispondono tipi di varietà normali a tre dimensioni.

Il problema di determinare i caratteri invariantivi di un ds^2 ternario affinchè esso sia riducibile alla forma di Liouville, problema completamente risolto dal Ricci per il ds^2 lineare, ha notevole importanza. La questione venne risolta dal Tonolo nel caso che il ds^2 sia a curvatura costante, oppure che abbia due curvature eguali e distinte dalla terza, o che le tre curvature, essendo distinte, siano costanti.

Accanto a queste ricerche, il Tonolo studiò anche questioni di geometria dello spazio Hilbertiano. Tra l'altro, dà una interpretazione geometrica delle superficie minime di tali spazi, e una classificazione delle superficie dello spazio Hilbertiano, il cui spazio 2-tangente è a quattro dimensioni.

Il terzo cospicuo gruppo di lavori, pubblicati dal 1934 al 1940, fu dedicato dal Tonolo, nell'indirizzo iniziato dal Levi-Civita, allo studio dei « piccoli triangoli » non geodetici, tracciati sopra una superfice generica, allo scopo di dedurre alcune formule di trigonometria — estensione di quelle ben note dei triangoli rettilinei nel piano euclideo — e per generalizzare alcuni teoremi ed alcuni sviluppi in serie della classica Geodesia teoretica. Sulla importanza di questi studi, dal punto di vista della geodesia operativa, si è espresso in modo assai favorevole il compianto collega prof. Giovanni Boaga in una recensione che egli fece nella rivista « L'universo ». Egli termina con queste parole: « I bei lavori di Levi-Civita e del Tonolo hanno aperto un vasto campo ed un nuovo indirizzo a questioni che interessano grandemente la geodesia. Dal punto di vista teorico, questa scienza considera triangoli geodetici. Dal punto di vista operativo, triangoli formati da archi di sezioni normali. Successivamente si prova che le differenze che si ottengono, con i due indirizzi, entro il campo delle operazioni geodetiche, sono di piccola entità. Con le ricerche accennate riesce pertanto possibile liberare la geodesia teoretica dalle considerazioni del triangolo geodetico, e considerare, anche teoricamente, i triangoli che si costruiscono nella geodesia operativa. Sotto questo punto di vista, i risultati ottenuti dal prof. Tonolo sono veramente notevoli ».

Questa attività scientifica del Tonolo è stata sempre accompagnata da studi di analisi pura, dedicati ad argomenti vari.

Mi limiterò qui a ricordare: un lavoro « Sopra l'esistenza di soluzioni fondamentali di una equazione alle derivate parziali di tipo ellittico », apparso nel 1911; una importante Memoria sulle funzioni olomorfe di ordine n, pubblicata nel 1935, ed uno studio sulle funzioni implicitamente definite da un sistema di equazioni nel campo reale, apparso nel 1960.

Non posso inoltre tacere le nobili e affettuose commemorazioni da lui scritte in memoria del Vitali, del Commessati e del Laura, ai quali fu legato da fraterna amicizia, e anche la commemorazione di Gregorio Ricci-Curbastro, nel centenario della nascita, letta nell'aula Magna dell'Università di Padova nel 1953.

I suoi meriti scientifici e didattici ebbero numerosi riconoscimenti. Era socio dell'Accademia Nazionale dei Lincei, dell'Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, dell'Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, della Accademia delle Scienze di Ferrara. Medaglia d'oro dei Benemeriti della Scuola e della Cultura, medaglia d'oro dell'Università di Ferrara, membro della Commissione scientifica dell'U.M.I. e del Comitato Italiano per l'Unione Matematica Internazionale, oltre che essere, come ho già ricordato, Professore Emerito dell'Università di Padova.

Figura riservata e dignitosa, sereno ed energico, coscienzioso e sensibile, dedicò, con scrupolosa onestà, agli studi ed alla Scuola le sue migliori energie, pur non rinunciando a quanto di bello la vita poteva offrirgli.

Egli conservò sempre una profonda ammirazione per i Suoi Maestri e un'amicizia sincera e costante verso i Suoi Colleghi.

Anche dei Suoi Assistenti fu amico fidato, generoso di consigli e di aiuto.

E prima di finire mi piace ricordare un episodio per me molto significativo a testimonianza della Sua bontà e lealtà.

Durante l'ultima guerra, quando dolorose vicende costrinsero, per motivi politici, tre Suoi Assistenti ad abbandonare temporaneamente il loro posto di lavoro, il prof. Tonolo non se ne doleva; anzi, non fece nulla per distoglierli e animato da profondo spirito di comprensione e spinto solo dal desiderio di aiutare i Suoi Collaboratori, volle in ogni circostanza giustificare la loro assenza, ben consapevole del grave rischio a cui si esponeva.

Per queste Sue doti profondamente umane fu circondato fino all'ultimo dall'affetto degli amici e dei colleghi, nei quali lascia un ricordo e un rimpianto che nemmeno il tempo potrà cancellare.

Ciò sia di conforto ai fratelli e ai parenti, ai quali fu tanto legato, e ai quali rinnoviamo il nostro commosso cordoglio.